ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, ER 05. 02. 2019

2 horas

Nome:____nº:________

Espaço reservado para classificações						
1a.(15)	2a. (20)	3a.(15)	4a.(10)	5a.(15)	6a.(10)	7.(10)
1b.(10)	2b. (10)	3b.(10)	4b (15)	5b.(15)	6b.(15)	8.(10)
	2c. (15)	3c.(10)		5c.(10)		

Atenção: Todas as questões devem ser <u>devidamente formalizadas e justificadas</u>.

1. Numa bomba de gasolina 35% dos clientes abastece com gasolina sem chumbo, 50% com gasóleo normal e os restantes com gasóleo aditivado. Dos clientes que abastecem com gasolina sem chumbo apenas 30% enche o depósito sendo esta percentagem de 20% para os clientes de gasóleo normal e de 40% para os de gasóleo aditivado.

a. Sabendo que um cliente encheu o depósito, qual a probabilidade de ser cliente de gasóleo aditivado.

Sejam os acontecimentos

A_1 O cliente abastece com gasolina sem chumbo $P(A_1)=0.35$

A_2 O cliente abastece com gasóleo normal $P(A_2)=0.5$

A_3 O cliente abastece com gasóleo aditivado $P(A_3)=0.15$ Já que $\sum P(A_i)=1$

B O cliente enche o depósito

Sabe-se ainda que $P(B\mid A_1)=0.3$, $P(B\mid A_2)=0.2$, $P(B\mid A_3)=0.4$

Assim

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(B\mid A_3)\times P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)\times P(A_i)}=\frac{0.4\times0.15}{0.3\times0.35+0.2\times0.5+0.4\times0.15}=0.2264$$

b. Numa amostra aleatória de 5 clientes tirados **com reposição**, qual a probabilidade de se observarem 3 clientes que se abastecem com gasolina sem chumbo.

X número de clientes (em 5) que abastecem com gasolina sem chumbo

$X\sim b(5,0.35)$ $P(X=3)=0.1811$

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade dada por $f_X(x)=\dfrac{x^3}{4}$, $0<x<2$.

Sabe-se ainda que $f_{Y\mid X=x}(y)=\dfrac{2y}{x^2}$, $0<y<x$ e $0<x<2$ (x fixo) .

a. Obtenha a função de distribuição de X e calcule $P(X<1.5\mid X>1)$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \frac{t^3}{4}\,dt & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{t^4}{16} & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$$P(X<1.5 \mid X>1) = \frac{P(1<X<1.5)}{P(X>1)} = \frac{F_X(1.5-0) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = \frac{\frac{1.5^4}{16} - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1^4}{16}} = \frac{1.5^4 - 1}{15} = 0.2708$$

b. Obtenha a função densidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X,Y) e calcule $P(Y>1)$.

$$f(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \times f_X(x) = \frac{2y}{x^2} \times \frac{x^3}{4} = \frac{xy}{2} \ , \ 0<y<x,\ 0<x<2.$$

$$P(Y>1) = \int_1^2 \int_1^x \frac{xy}{2}\,dy\,dx = \int_1^2 \frac{x}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left((4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} = 0.5625$$

OU

$$f_Y(y) = \int_y^2 \frac{xy}{2}\,dx = \frac{y}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right]_y^2 = \frac{y}{2} \times \frac{4-y^2}{2} = \frac{4y - y^3}{4} \ , \ 0<y<2$$

$$P(Y>1) = \int_1^2 f_Y(y)\,dy = \int_1^2 \frac{4y-y^3}{4}\,dy = \frac{1}{4}\left(\frac{4y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left((8-4) - \left(2 - \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{7}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

c. Sabendo que $E(Y) = 16/15$, calcule $\operatorname{cov}(X,Y)$.

$$E(Y) = \int_0^2 y\frac{4y-y^3}{4}\,dy = \frac{1}{4}\left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 8 \times \frac{2}{15} = \frac{16}{15} \quad \text{Dado}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^4}{4} f_X(x)\,dx = \left(\frac{x^5}{20}\right]_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^x \frac{x^2 y^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^5}{6}\,dx = \left(\frac{x^6}{36}\right]_0^2 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{16}{9} - \frac{16}{15} \times \frac{8}{5} = 0.0711$$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional cuja função probabilidade é dada por

$x \setminus y$	-1	0	1
0	0.10	0.05	0.15
1	0.05	0.10	0.05
2	0.10	0.25	0.15

a. Calcule $P(X \geq Y)$, $P(X > 1 \mid Y=0)$ e $E(X \mid Y=0)$.

$$P(X \geq Y) = 1 - P(X < Y) = 1 - f(0,1) = 1 - 0.15 = 0.85$$

$$P(X > 1 \mid Y=0) = \frac{P(X>1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.25}{0.05+0.10+0.25} = \frac{0.25}{0.40} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$f_{X|Y=0}(x) = P(X=x \mid Y=0) = \frac{P(X=x, Y=0)}{P(Y=0)} = \begin{cases} 0.05/0.40 & x=0 \\ 0.10/0.40 & x=1 \\ 0.25/0.40 & x=2 \\ 0 & \text{outros } x \end{cases} = \begin{cases} 0.125 & x=0 \\ 0.250 & x=1 \\ 0.625 & x=2 \\ 0 & \text{outros } x \end{cases}$$

$$E(X \mid Y=0) = 0 \times 0.125 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.625 = 1.5$$

b. Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y, $\rho_{X,Y}$

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.5 = 1.2\,;\ E(X^2) = 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.5 = 2.2$$

$$E(Y) = (-1) \times 0.25 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.35 = 0.1\,;\ E(Y^2) = (-1)^2 \times 0.25 + 0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.35 = 0.6$$

$$E(XY) = 1 \times (-1) \times 0.05 + 1 \times 1 \times 0.05 + 2 \times (-1) \times 0.10 + 2 \times 1 \times 0.15 = 0.35 - 0.25 = 0.1$$

$$\text{var}(X) = 2.2 - 1.2^2 = 0.76\,;\ \text{var}(Y) = 0.6 - 0.1^2 = 0.59\,;\ \text{cov}(X,Y) = 0.1 - 1.2 \times 0.1 = -0.02$$

$$\rho = \frac{-0.02}{\sqrt{0.76 \times 0.59}} = \frac{-0.02}{0.6696} = -0.0299$$

c. Obtenha a função de distribuição de $Z = X + Y$

Verifica-se empiricamente que Z pode assumir com probabilidade positiva os valores $-1, 0, 1, 2, 3$ e portanto vem

z	-1	0	1	2	3
$f_Z(z)$	0.10	0.10	0.35	0.30	0.15

4. Admita que o número de músicas que uma banda toca num determinado concerto segue um processo de Poisson com taxa média de 10 músicas por hora.

a. Qual a probabilidade de se ouvirem mais do que 6 músicas na primeira meia hora do concerto?

X número de músicas que se irão ouvir ma primeira ½ hora $\qquad X \sim Po(5)$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0.7622 = 0.2378$$

b. Suponha agora que foram tocadas 10 músicas no concerto. Qual a probabilidade de a canção mais longa ter demorado mais do que 8 minutos?

Y_i tempo que a música i demorou (horas) $\qquad Y_i \sim Ex(10)$

$$P(\max Y_i > 8/60) = 1 - P(\max Y_i \leq 8/60) = 1 - \left(P(Y \leq 8/60)\right)^{10}$$

$P(Y \leq 8/60) = \int_0^{8/60} 10e^{-10x}dx = \left(-e^{-10x}\right]_0^{8/60} = 1 - e^{-8/6} = 0.7364$ e portanto

$$P(\max Y_i > 8/60) = 1 - \left(P(Y \leq 8/60)\right)^{10} = 1 - 0.7364^{10} = 1 - 0.0469 = 0.9531$$

5. Suponha que, num mês, a variação do preço de um determinado ativo Y (em percentagem) segue uma distribuição normal com média 5 e desvio padrão 2. Assume-se que a variações de preço são independentes de mês para mês.

a. Sabe-se que um investidor só irá vender o ativo se a variação de preço for superior a 10%. Qual a probabilidade de o investidor decidir vender o ativo?

$Y \sim n(5, 2^2)$

$$P(Y > 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10-5}{2}\right) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

b. Qual a probabilidade de, em 14 meses, as variações mensais de preço se situarem entre 5% e 10% no máximo em 10 desses meses?

X número de meses (em 14) em que as variações se situam entre 5% e 10%

$X \sim b(14, \theta)$ em que $\theta = P(5 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{2}\right) = 0.9938 - 0.5 = 0.4938 \approx 0.5$

$P(X \leq 10) = 0.9742$ (maq) $=0.9713$ (tabelas)

c. Considere outro ativo X cuja variação mensal de preço (em percentagem) também segue uma distribuição normal mas de média 4 e desvio padrão 3. Qual a probabilidade da média das variações mensais dos preços do ativo Y, ao longo de 10 meses, ser superior à média das variações mensais dos preços de X, durante 12 meses?

$$P(\overline{Y}_{10} > \overline{X}_{12}) = P(\overline{Y}_{10} - \overline{X}_{12} > 0)$$

$$Z = \frac{\left(\overline{Y}_{10} - \overline{X}_{12}\right) - (5-4)}{\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{9}{12}}} \sim n(0,1)$$

$$P(\overline{Y}_{10} - \overline{X}_{12} > 0) = P\left(\frac{\left(\overline{Y}_{10} - \overline{X}_{12}\right) - (5-4)}{\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{9}{12}}} > \frac{-1}{1.072}\right) = 1 - \Phi(-0.93) = \Phi(0.93) = 0.8238$$

6. Uma corrida de F1 é composta por 30 voltas a um circuito

a. Assumindo que o tempo por volta de determinado piloto é uma variável aleatória com distribuição gama de parâmetros $\alpha = 1.5$ e $\lambda = 0.46$ e que os tempos são independentes de volta para volta qual a probabilidade do piloto necessitar de menos de 117 minutos para concluir a prova.

Seja X_i o tempo para completar a volta i e T o tempo total.

$X_i \sim G(1.5, 0.46)$ e como X_i, X_j independentes para $i \neq j$, $T = \sum_{i=1}^{30} X_i \sim G(45, 0.46)$ e portanto $0.92T \sim \chi^2_{(90)}$

$$P(T < 117) = P(0.92T < 107.64) \approx 0.9$$

b. Abandone a hipótese feita na alínea anterior e assuma que a média do tempo por volta é de 3.3 minutos, sendo a variância igual a 7.1. Assumindo a independência entre os tempos realizados em cada volta, calcule uma aproximação para a probabilidade pedida na alínea anterior.

Não se conhecendo a distribuição do tempo por volta, recorre-se ao TLC

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{30}X_i\right)=30\times 3.3=99\ ;\ \text{var}(T)=\text{var}\left(\sum_{i=1}^{30}X_i\right)=30\times 7.1=213 \quad \text{independência}$$

E portanto $\frac{T-99}{\sqrt{213}}\overset{a}{\sim} n(0,1)$. Assim $P(T<117)=\Phi\left(\frac{117-99}{\sqrt{213}}\right)=\Phi(1.23)=0.8907$ (tabelas)

7. Suponha que se recolhe uma amostra casual de dimensão n de uma população X com distribuição do Qui-quadrado com parâmetro α. Prove que com $Y=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-2\alpha$, se tem $E(Y)=-\alpha$.

$$E(Y)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-2\alpha\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)-2\alpha=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-2\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{n}-2\alpha$$

$$=\frac{nE(X)}{n}-2\alpha=E(X)-2\alpha=\alpha-2\alpha=-\alpha$$

8. Assuma que X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ. Será que a informação adicional de que $P(X=2)=3\times P(X=3)$ lhe permite determinar o valor de λ? Se sim, determine este valor, caso contrário explique porque não é suficiente.

$X \sim Po(\lambda)$

$P(X=2)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}\ ;\ P(X=3)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{6}$ e portanto

$$P(X=2)=3\times P(X=3)\Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{6}\Leftrightarrow \lambda=3$$